SOBRE AS LEIS DE POISEUILLE NO SISTEMA CIRCULATÓRIO

Fernando Ricardo Moreira[1]

Resumo

Neste trabalho fizemos uma breve biografia sobre Poiseuille, e sua contribuição numa área muito importante da matemática que é a dinâmica dos fluidos. Destacamos que as leis de Poiseuille foram desenvolvidas paralelamente e de forma independente por Gotthilf Hagen, um engenheiro hidráulico alemão. Falamos um pouco sobre alguns conceitos básicos tais como pressão, viscosidade e fluxo laminar.

Também deduzimos as duas Leis de Poiseuille, uma sobre o fluxo e a outra sobre a velocidade no sistema circulatório. Ressaltamos a analogia das leis de Poiseuille com a Lei de Ohm para circuitos elétricos. Por último, fizemos uma aplicação das leis para o cálculo do ângulo ótimo de ramificação de uma artéria.

Palavras–Chave: Fluidos, Escoamento, Viscosidade, Ramificação .

[1] MAF – UCG Mestre – Matemática Aplicada. moreirafrmat@hotmail.com

1 – Introdução

As leis de Poiseuille tratam do fluxo de um líquido, com certa viscosidade, no interior de um tubo cilíndrico. A motivação para o estudo de Poiseuille era entender o comportamento do fluxo de sangue dentro das veias e artérias do corpo humano. Poiseuille executou suas experiências em tubos capilares de vidro tendo a água como fluido, pois naquele tempo não existia coagulante, impedindo o uso do sangue, além disso, ele usou ar comprimido para forçar a passagem da água através dos tubos para medir o fluxo resultante.

Atualmente as Leis de Poiseuille são aplicadas em vários problemas que envolvem o escoamento de fluidos em tubulações e um deles é o fluxo sanguíneo nas artérias e veias.

Apresentamos a seguir uma breve biografia de Jean-Louis-Marie Poiseuille (1799 - 1869). Médico fisiologista e físico francês nascido em Paris, estudioso do escoamento em micro tubos, com diâmetros inferiores a 0,2mm. Suas publicações iniciaram-se (1828) discutindo sobre o bombeamento do coração, o escoamento do sangue nas veias e nos vasos capilares e a resistência a este movimento. Publicou diversos artigos sobre o coração e a circulação sanguínea, a *hemodinâmica*, sendo que neste assunto sua última publicação *foi Recherches expérimentales sur le mouvement des líquides dans les tubes de très petits diamètres* (1841). Porém seus conhecimentos em circulação do sangue possibilitaram-no entender também a circulação de água em tubulações. Assim pesquisou as leis de fluxo laminar de fluidos viscosos em tubos cilíndricos e publicou uma importante obra, *Le mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres* (1844). Integrou a equação que mostrou que em um regime laminar a velocidade média é proporcional a perda - *lei de Poiseuille*. Assim esse médico francês formulou uma expressão matemática para a taxa de fluxo laminar de fluidos em tubos circulares, descoberta independentemente por **Gotthilf Hagen**, um engenheiro hidráulico alemão. Por isso, esta relação também se tornou conhecida como a *equação de Hagen-Poiseuille*. A **equação de Hagen-Poiseuille** é uma lei da física que descreve um fluxo incompressível (incompressível significa não haver variação na densidade do fluido) de baixa viscosidade através de um tubo de seção transversal circular constante. A equação de Hagen-Poiseuille pode ser derivada das famosas equações diferenciais matemáticas de Navier-Stokes, veja [2]. Poiseuille morreu em Paris e na Física foi homenageado com a unidade de viscosidade absoluta, ou dinâmica, *Poise* (= 0,1 N.s/m²).

As leis de Poiseuille têm diversas aplicações na dinâmica de fluidos e em mecânica dos solos. Por exemplo, em [1], a lei de Poiseuille e a lei de Laplace são usadas para estabelecer uma relação entre a pressão da água e a condutividade hidráulica, com um raio de poro característico para um problema de mecânica de solos. Para saber um pouco mais sobre as leis de Poiseuille veja [3].

2 - Conceitos Básicos

Nesta seção definiremos alguns conceitos básicos para o entendimento do assunto a ser tratado. Começamos com a seguinte definição:

Definição 2.1 – Sejam dois fluidos em movimento com uma área de contato. O líquido da parte superior esta se movendo mais rápido e será puxado na direção negativa pelo líquido da parte inferior; enquanto que o líquido da parte inferior será puxado na direção positiva pelo líquido da parte superior. A **viscosidade** ? de um fluido é o atrito interno entre as camadas de fluído. A unidade SI para viscosidade é $N.s.m^{-2}$ ou $kg.m^{-1}.\ s^{-1}$. A viscosidade é tipicamente expressa em unidades de poise (P), onde 1 poise (P) = 0,1 kg m^{-1} s^{-1}.

Todos os líquidos se tornam mais viscosos com a diminuição da temperatura. Assim, quando uma pessoa entra em estado de choque devido a um acidente, por exemplo, a temperatura de seu corpo cai; consequentemente aumenta a viscosidade do sangue. Isso pode produzir uma queda do fluxo sangüíneo. Essa é uma das razões pelas quais as vítimas de acidentes devem ser cobertas para evitar uma diminuição grande de suas temperaturas.

Definição 2.2 - A **pressão** P é definida como uma força **F** atuando perpendicularmente a uma superfície de área A e é dada por

$$\text{Pressão} = \frac{\text{Força}}{\text{Area}} = \frac{F}{A}$$

As unidades S.I. para pressão são Nm^{-2}. Outras unidades são muito usadas na prática, a atmosfera (atm) e o milímetro de mercúrio (mmHg) e a "libra" (lb/in^2). Dois tipos específicos de pressão particularmente aplicável aos fluidos incluem *pressão atmosférica* e *pressão hidrostática.*

PRESSÃO ATMOSFÉRICA - representa a pressão média exercida pela atmosfera terrestre ao nível do mar e é definida numericamente como:

$$1 \text{ atm} = 1{,}01 \times 10^{5} \text{ Nm}^{-2} = 1{,}01 \times 10^{5} \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg} .$$

PRESSÃO HIDROSTÁTICA P_{hid} - é a pressão de um fluido exercida numa profundidade h num fluido de densidade ? e é dada por

$$P_{hid} = \text{?}\ g\ h$$

Aqui **g** representa a aceleração da gravidade. Na medicina a unidade mais usada é o mmHg. Por exemplo, um pico de pressão sangüínea (sistólica) lida como 120 mmHg indica que uma coluna de mercúrio desta altura tem uma pressão na sua base igual à pressão sangüínea sistólica do paciente. Desde que a densidade do mercúrio é 13,6 g/cm^3, uma coluna de água tem que ser 13,6 vezes maior que uma dada coluna de mercúrio, a fim de produzir a mesma pressão. É algumas vezes conveniente indicar diferenças de pressão no corpo humano em termos da altura de uma coluna de água.

Se uma pressão externa P_{ext} é exercida no fluido, então a pressão total P é a soma da pressão externa e da pressão hidrostática.

$$P = P_{ext} + \text{?}\ g\ h$$

onde a pressão atmosférica, na maioria dos casos, é considerada uma pressão externa.

3 - Dinâmica dos Fluidos

Embora os ***fluidos*** difiram dos sólidos em termos de estrutura e composição, os fluidos possuem inércia, definida pela sua densidade, e estão assim sujeitos às mesmas interações físicas que os sólidos. Por exemplo, se atuado por uma força externa, os fluidos acelerarão. Uma vez em movimento, os fluidos possuem energia pela qual trabalho pode ser feito. Tanto na Medicina como na Biologia existem muitos fenômenos que são compreendidos através dos conceitos básicos e das propriedades de escoamento de fluidos.

3.1 - Definições de Escoamento de Fluidos Ideais

De modo geral, o escoamento de um fluido não é descrito pelo movimento individual de cada uma de suas partículas, mas é especificado por sua densidade ? e velocidade de escoamento v numa determinada posição e num determinado instante.

Se a velocidade v num ponto qualquer for constante em relação ao tempo, isto é, se as partículas ao passarem por aquele ponto tiverem a mesma velocidade, diz-se que o escoamento é *permanente*. Isto não significa que num outro ponto a velocidade não possa ser diferente. Se a velocidade v das partículas ao passarem por um determinado ponto variar com o tempo, o escoamento é dito *variado.* Se a densidade de um fluido em movimento variar, ele é considerado *compressível*; caso contrário, diz-se que é *incompressível*. Um fluido incompressível que não apresenta resistência ao movimento chama-se **fluido ideal**.

Definição 3.1.1 – A **vazão** Q é o volume de um fluido que passa através da seção transversal de um tubo na unidade de tempo. As suas dimensões são dadas por L^3 T^{-1} e suas unidades são m^3 s^{-1} ; ml s^{-1} ou $cm^3 s^{-1}$.

$$Q = \frac{\text{volume}}{\text{tempo}} = \frac{V}{t}$$

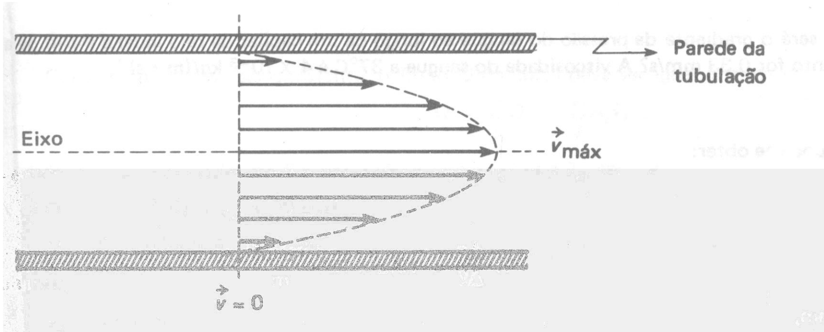
A vazão pode também ser expressa em termos da velocidade por

$$Q = A \cdot v$$

onde A é a área da seção transversal do tubo e v é a velocidade do fluxo.

3.1.1 - Escoamento Laminar

Uma das conseqüências da existência da viscosidade num fluido é a variação da velocidade de escoamento das camadas de fluidos. Assim as velocidades em dois pontos distintos da mesma seção transversal será diferente. Um perfil dessas velocidades pode ser obtido colocando-se um corante num líquido em escoamento. O fluido que está em contato com a parede da tubulação está em repouso, e sua velocidade aumenta com a aproximação ao eixo, onde atinge o valor máximo. A diminuição da velocidade é produzida pela força de atrito tangencial entre duas camadas adjacentes do fluido que, por sua vez, é função do seu coeficiente de viscosidade.



Quando a velocidade de fluxo através de uma seção é máxima no centro e decresce segundo uma parábola até zero na camada adjacente à parede do tubo, o escoamento se diz *laminar*. Nesse caso, o fluxo Q de um fluido com coeficiente de viscosidade ? ao longo de um *tubo cilíndrico rígido* de raio R e comprimento L, sujeito a um gradiente de pressão externa e constante ? P pode ser expresso como

$$?p \; ? \; \frac{8?\,Q}{?}\frac{L}{R^4} \qquad \textbf{(1)}$$

onde ? é a viscosidade do fluido.Esta é a segunda ***Lei de Pouseuille.***

Apresentaremos agora a primeira ***Lei de Poiseuille***. Considere um fluxo laminar de uma solução simples num tubo capilar cilíndrico. A 1ª lei de Poiseuille afirma que a velocidade do fluxo v em tal tubo decresce em função da distância radial r do centro. Matematicamente,

$$v(r) \; ? \; 2\overline{v} \, ?1 ? \frac{r^2}{R^2} ? \qquad \textbf{(2)}$$

onde $\bar{v}$ é a velocidade média, e R é o raio do tubo. Com isso, a velocidade de uma molécula de soluto depende de sua localização espacial dentro do conduto. Quando r ? R (parede do tubo), a velocidade é nula, mas quando r ? 0 (centro do tubo), a velocidade é máxima e igual a duas vezes a velocidade média.

3.1.1.1 - Analogia com Circuito Elétrico

Originalmente, a eletricidade era considerada um tipo de fluido. Esta analogia hidráulica ainda é conceitualmente útil.

A lei de Poiseuille corresponde a Lei de Ohm para circuitos elétricos (*V* = *IR*), onde a queda de pressão ?*P* é análoga a tensão elétrica *V* e o fluxo F é análogo a corrente elétrica *I*. Então, a resistência

$$R = \frac{8\eta\Delta x}{\pi r^4}$$

Este conceito é útil pois a resistência efetiva do tubo é inversamente proporcional ao raio elevado a quarta potênia. Isto significa que uma redução do tubo pela metada aumentaria a resistência ao movimento do fluido em 16 vezes.

Tanto a lei de Ohm quanto a lei de Poiseuille ilustram o fenômeno do transporte.

A seguir apresentamos dois exemplos sobre a aplicação da lei de Poiseuille no sistema circulatório.

Exemplo 3.1.1.1 - O sangue é bombeado do coração numa razão de 5 litros/min para o interior da aorta de raio 2,0 cm. Assumindo que a viscosidade e a densidade do sangue são 4 x 10^3 N s m^{-2} e 1 x 10^3 kg m^{-3}, respectivamente, determine a velocidade do sangue através da aorta.

Solução:

A velocidade de fluxo sangüíneo está relacionada à razão de fluxo volumétrico por

v = (razão de fluxo)/(área de secção transversal)

razão de fluxo = [(5 x 10^{-3} m^3)/ min] . [1 min/60 s] = 8,33 x 10^{-5} m^3 s^{-1}

Área de seção transversal = ? $r^2 = (3,14)(0,02)^2 = 1,26 \times 10^{-3}\ m^2$

Portanto, a velocidade do fluxo sangüíneo é

$$v = 6,6 \times 10^{-2}\ m\ s^{-1} \text{ ou } 6,6\ cm\ s^{-1}.$$

Exemplo 3.1.1.2 – O número de vasos sangüíneos capilares na circulação humana é aproximadamente 1×10^9 com diâmetro e comprimento de cada vaso sendo 8 ? m e 1 mm, respectivamente. Assumindo que a saída cardíaca é 5 litros min^{-1}, determine:

i) A velocidade média do fluxo sangüíneo através dos vasos capilares;

ii) O tempo que o sangue leva para atravessar um único vaso capilar;

iii) O tempo requerido para 1 ml de sangue fluir através de um único vaso capilar na vazão normal.

Solução :

A velocidade do fluxo sangüíneo através dos vasos capilares pode facilmente ser determinada por

$$v = \frac{Q}{n\ A} = \frac{5 \times 10^3\ ml\ .\ min^{-1}}{(1x10^9 \text{vasos capilares})(3,14)(4x10^{-4}cm)^2} = 9,9\ cm.min^{-1} = 0,17 cm.s^{-1}$$

O tempo que o sangue leva para atravessar um único vaso capilar é dado por

$$t = \frac{1\,ml}{(5x10^3 / 10^9 \text{ vasos capilares})\ ml\ min^{-1}} = 2\,10^5\ min\ = 139\ dias$$

O tempo requerido para 1 ml de sangue fluir através de um único vaso capilar numa vazão normal é

$$t = (1,0\ ml) / (1,66\ ml\ s^{-1}) = 0,60\ s.$$

4 - Derivação das Leis de Poiseuille

Nesta seção vamos deduzir as duas leis de Poiseuille apresentadas anteriormente. Finalmente, depois da dedução das leis, apresentaremos uma aplicação da segunda lei de Poiseuille para o ângulo ótimo de ramificação de uma artéria.

4.1 – Dedução da Primeira Lei

A derivação da Lei de Poiseuille é surpreendentemente simples, mas requer um entendimento sobre viscosidade. Quando duas camadas de líquido estão em contato e cada uma se move a diferentes velocidades, existirá uma força entre elas. Esta força é proporcional a área de contato *A*, a diferença de velocidade na direção do fluxo *?*v_x*/?y*, e é proporcional a constante *?*:

$$F_{\text{viscosidade, topo}} = -\eta A \frac{\Delta v_x}{\Delta y}$$

O sinal negativo é porque estamos nos referindo ao líquido com movimento mais rápido, que esta sendo retido pelo líquido mais lento. Pela terceira lei de movimento de Newton, a força no líquido mais lento é igual e oposta (sem o sinal de nemos) que a força do líquido mais rápido. Esta equação assume que a área de contato é tão ampla que podemos ignorar os efeitos das bordas e que o fluído tem um comportamento de um fluído newtoniano.

Fluxo de líquido através de um tubo

Fazemos uma consideração básica para o líquido no tubo: a velocidade do líquido no centro do tubo é muito máxima, enquanto que a velocidade do líquido próxima à parede do tubo é zero (devido ao atrito). Para simplificar a situação, vamos assumir que existe um grupo de camadas circulares (lâmina) de líquido, cada uma com sua velocidade determinada somente pela sua distância radial do centro do tubo.

Para calcularmos o movimento do líquido, nós precisamos conhecer todas as forças atuando em cada lâmina:

1. A força que “empurra” o líquido através do vaso sanguíneo corresponde à variação de pressão multiplicada pela área: *F* = -*?PA*. A direção desta força é a mesma do movimento do sangue e o sinal negativo deve-se a convenção

de definição da variação da pressão ?$P = P_{end}$ - P_{top} que é sempre menor que zero.

2. O arrasto pela lâmina mais rápida; lâmina seguinte na direção do centro do tubo.
3. A retenção devida a lâmina mais lenta; lâmina seguinte na direção das paredes do tubo

A primeira destas forças vem da definição de pressão. As duas forças restantes exigirão a utilização das equações de viscosidade para cada caso a fim de solucionar o problema. Vamos nos concentrar no arrasto da lâmina mais rápida primeiro.

Lâmina mais rápida

Assuma que estamos calculando a força na lâmina com raio *s*. Da equação acima, precisamos determinar a área de contato e o gradiente de velocidade. Pense na lâmina como um cilindro de ráio *s* e espessura *ds*. A área de contato entre a lâmina e a lâmina mais rápida é simplesmente a área interna do cilindro: *A = 2ps?x*. Ainda não sabemos a velocidade do líquido no tubo, mas sabemos (baseado em nossas suposições iniciais) que é dependente do raio. Assim, o gradiente de velocidade é a variação da velocidade com respeito a variação do raio na intersacção entre as duas lâminas. Esta intersecção é de raio *s*. Assim, considerando que esta força será positiva com respeito ao sentido do movimento do líquido (mas a derivada da velocidade será negariva), a forma final da equação será

$$F_{\text{viscosidade, rpida}} = -\eta 2\pi s \Delta x \left. \frac{dv}{dr} \right|_s$$

onde a barra vertical e o subscrito *s* após a derivada indica que esta deve ser considerada para o raio *s*.

Lâmina mais lenta

Agora vamos calcular a força para de arrasto da lâmina mais lenta. Precisamos calcular os mesmos valores que fizemos para a lâmina mais rápida. Só que neste caso, a área de contato será a superficie externa do cilindro: *s+ds* ao invés de *s*. Também precisamos lembrar que a força resultante se opõem a direção do movimento do líquido o que torna a força negativa (apesar da derivada da velocidade continuar sendo negativa).

$$F_{\text{viscosidade, lenta}} = \eta 2\pi(s+ds)\Delta x \left.\frac{dv}{dr}\right|_{s+ds}$$

Colocando tudo junto

Para determinar a solução para o fluxo do líquido através do tubo, nos precisamos fazer uma última suposição. O líquido no tubo não está sendo acelerado e, pela primeira lei de Newton, não há nenhuma força resultante. Se não há nenhuma força resultante, então a somatória de todas as forças tem que ser zero

$$0 = F_{pressão} + F_{viscosidade,\ rápida} + F_{viscosidade,\ lenta}$$

ou

$$0 = -\Delta P 2\pi s ds - \eta 2\pi s \Delta x \left.\frac{dv}{dr}\right|_{s} + \eta 2\pi(s+ds)\Delta x \left.\frac{dv}{dr}\right|_{s+ds}$$

Antes de prosseguir, precisamos simplificar esta equação horrorosa. Primeiramente, para termos tudo ocorrendo no mesmo ponto, nos precisamos expandir o gradiente da velocidade utilizando a série de Taylor, mantendo apenas os termos de primeira e segunda ordem (os demais termos podem ser desprezados por serem muito pequenos).

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r+dr} = \left.\frac{dv}{dr}\right|_{r} + \left.\frac{d^2v}{dr^2}\right|_{r} dr$$

Vamos utilizar esta relação em nossa equação. Também vamos utilizar *r* ao invés de *s* já que escolhemos uma lâmina arbitrária e queremos uma expressão que seja válida para todas as lâminas. Agrupando os termos semelhantes e eliminando as barras verticais, já que todas as derivadas serão para o raio *r*,

$$0 = -\Delta P 2\pi r dr + \eta 2\pi dr \Delta x \frac{dv}{dr} + \eta 2\pi r dr \Delta x \frac{d^2v}{dr^2} + \eta 2\pi (dr)^2 \Delta x \frac{d^2v}{dr^2}$$

Finalmente, vamos converter em uma equação diferencial, movendo alguns termos para que fique mais facil de ser resolvida, e desprezando o termo quadrático em *dr* já que este será muito pequeno quando comparado aos demais termos (outro truque matemático padrão).

$$\frac{1}{\eta}\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}$$

Pode ser observado que ambos os ramos da equação são negativos: há uma queda de pressão no tubo (lado esquerdo) e ambas derivadas (de primeira e segunda ordem) da velocidade são negativas já que a velocidade tem o seu máximo no centro do tubo. A equação pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\eta}\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dv}{dr}$$

Esta equação diferencial está sujeitas as seguintes condições limítrofes:

$v(r) ? 0$ para r = R -- velocidade junto às paredes do tubo.

$\frac{dv}{dr} ? 0$ para r = 0 -- simetria axial

A simetria axial significa que a velocidade v(r) é máxima no centro do tubo, assim a primeira derivada dv/dr será zero para r = 0.

A equação diferencial pode ser integrada para:

$$v(r) = \frac{1}{4\eta} r^2 \frac{\Delta P}{\Delta x} + A ln(r) + B$$

Para determinar A e B, vamos utilizar as condições limítrofes. Primeiro, a condição de simetria indicada:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\eta} r \frac{\Delta P}{\Delta x} + A\frac{1}{r} = 0 \qquad \text{para r = 0}$$

A única solução possível ocorre se A = 0. Por último, considerando a velocidade junto às paredes do tubo na equação restante:

$$v(R) = \frac{1}{4\eta} R^2 \frac{\Delta P}{\Delta x} + B = 0$$

assim

$$B = -\frac{1}{4\eta} R^2 \frac{\Delta P}{\Delta x}$$

Agora nós temos uma equação da velocidade de um líquido em um tubo, em função da distância do centro do tubo.

$$v = -\frac{1}{4\eta}\frac{\Delta P}{\Delta x}(R^2 - r^2)$$

ou, a velocidade máxima no centro do tubo (*r* = 0) sendo *R* o raio interno do tubo,

$$v_{max} = -\frac{1}{4\eta}\frac{\Delta P}{\Delta x}R^2$$

A equação da velocidade em função do raio obtida acima é a mesma equação da primeira Lei de Poiseuille (equação 2), devendo apenas observar que a expressão para a velocidade média do fluxo é dada por

$$\bar{v} \; ? \; ? \frac{1}{8?}\frac{? P}{? x} R^2$$

4.2 – Dedução da Segunda Lei

Queremos calcular o fluxo de fluido viscoso dentro de um tubo cilíndrico. Vamos chamar este fluxo de Q. Por definição, o fluxo é a variação do volume em relação ao tempo, isto é expresso pela seguinte derivada

$$Q ? \frac{dV}{dt} ? v?R^2$$

onde a segunda igualdade, diz apenas que a variação do volume em relação ao tempo é igual ao produto da velocidade pela área da seção transversal (área de um círculo de raio *R*). Usando a fórmula para a velocidade dada pela primeira lei de Poiseuille, obtemos

$$Q ? \frac{dV}{dt} ? v?R^2 ? \frac{?R^4}{8?} ? \frac{? ?P}{?x} ? ? \frac{?R^4}{8?} \frac{|?P|}{?x}$$

que é exatamente a segunda lei de Poiseuille dada pela equação (1).

Onde:

V é o volume do líquido (metros cúbicos)

t é o tempo (segundos)

v é a velocidade do fluído ao longo do comprimento do tubo (metros/segundos)

x é a distância na direção do fluxo (metros)

R é o raio interno do tubo (metros)

?P é a diferença de pressão entre os dois extremos do tubo (pascals)

? é a viscosidade dinâmica do fluído (pascal-segundos (Pa·s))

4.3 – Aplicação da Lei de Poiseuille – Ângulo Ótimo de Ramificação

Nesta seção vamos usar a segunda lei de Poiseuille para encontrar qual é o ângulo ótimo de ramificação de uma artéria.

Quanto menor a resistência ao fluxo em um vaso sanguíneo menor a energia gasta pelo coração. Assim, o sistema vascular sanguíneo opera de tal forma que a circulação do sangue do coração através dos órgãos do corpo e de volta ao coração é executada com mínimo de gasto de energia possível. Assim, é razoável esperar que, quando a artéria se ramifica o ângulo entre a artéria "mãe" e a artéria "filha" deve minimizar a resistência total ao fluxo do sangue. Usando a 2ª Lei de Poiseuille, podemos encontrar o **ângulo ótimo de ramificação**.

A Fig. 1 abaixo, mostra uma artéria "filha" de raio r se ramificando a partir de uma artéria "mãe" de raio R. O sangue flui na direção das setas, do ponto A para o ramo em B, e então para C e para D.

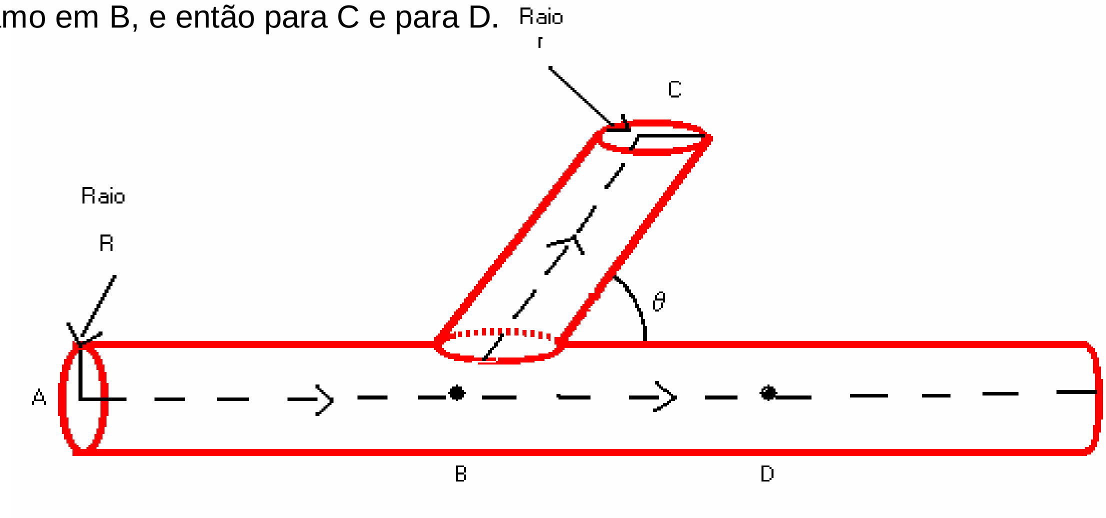


Figura 1 - Ramificação de uma artéria.

Afirmação: O ângulo ótimo de ramificação θ é obtido resolvendo a equação.

$$\cos\theta = \frac{r^4}{R^4}$$

De fato, de acordo com a 2ª Lei de Poiseuille, a resistência do sangue em fluir do ponto A para o ponto B, na Fig. 1 é

$$?_1 \; ? \; \frac{ks_1}{R^4}$$

e a resistência do ponto B até o ponto C é

$$?_2 \; ? \; \frac{ks_2}{r^4}$$

onde k é uma constante que depende da viscosidade do sangue e s_1 e s_2 são os comprimentos das partes da artéria de A a B e de B a C, respectivamente. Assim, a resistência total do sangue em fluir através da ramificação é dada pela soma

$$? \; ? \; ?_1 \; ? \; ?_2 \; ? \; \frac{ks_1}{R^4} \; ? \; \frac{ks_2}{r^4} \; ? \; k ? \frac{s_1}{R^4} \; ? \; \frac{s_2}{r^4} ?$$

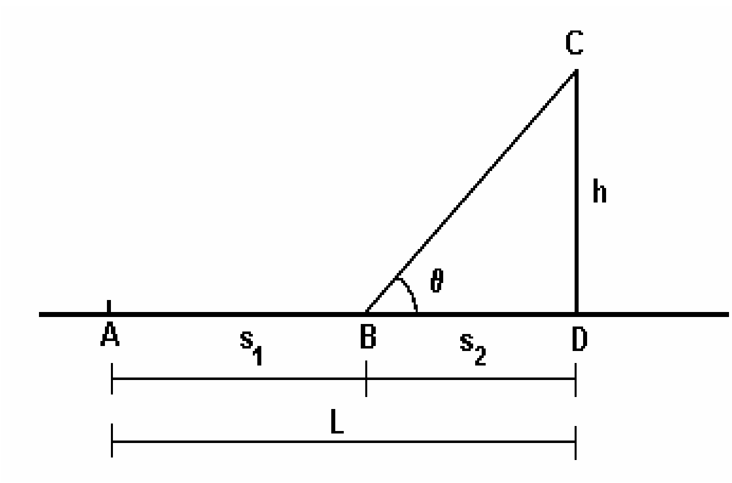


Figura 2 - Diagrama geométrico da ramificação de uma artéria.

Através da Fig. 2, podemos escrever ? como uma função do ângulo de ramificação ?, ou seja,

$$\boxed{? \, (?) \; ? \; k ? \frac{L \; ? \; h \cot g ?}{R^4} \; ? \; \frac{h \operatorname{cos} ec ?}{r^4} ?}$$

Os valores de $?$ que minimiza a resistência deve satisfazer a equação $?'(?) ? 0$, ou seja,

$$h.k.\cos ec?\ ?\frac{\cos ec?}{R^4} ? \frac{\cot g?}{r^4} ? ? 0$$

Devido ao fato de $\cos ec?, k$ e h nunca serem nulos, segue-se que $?'(?) ? 0$ somente quando

$$\frac{\cos ec?}{R^4} ? \frac{\cot g?}{r^4} ? 0 \quad ? \quad \cos ? ? \frac{\mathrm{r}^4}{R^4}$$

Finalmente se $?_0$ é o ângulo que satisfaz esta equação, pode ser mostrado que $?''(?_0) ? 0$. Assim, a resistência $?$ é minimizada quando $? ? ?_0$ e neste caso, $?_0$ é o ângulo ótimo de ramificação vascular.

Outra interessante aplicação das leis de Poiseuille é encontrada em [4]. A aplicação refere-se ao cálculo do fluxo sangüíneo em uma artéria obstruída em comparação com uma artéria sem obstrução.

5 - Referências Bibliográficas

[1] ANTONINO, A. C.D.; RUIZ, C. F.; SOUZA, E. S. de; NETTO, A. M.; JARAMILLO , R. A. – ***Distribuição Probabilística do fator de Escala de dois solos do estado da Paraíba.*** *Rev. bras. eng. agríc. ambient.*, May/Dec. 2004, vol.8, no.2-3, p.220-224. ISSN 1415-4366.

[2] ***Hagen-Poiseuille flow from the Navier-Stokes equations***. http://en.wikipedia.org/wiki/Hagen-Poiseuille_flow_from_the_Navier-Stokes_equations

[3] SUTERA, S. P.; SKALAK, R. – ***"The history of Poiseuille's law"***. Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 25, 1993, pp. 1-19

[4] VILELA, M.F. dos S, SANTOS, P. B. dos, JAFELICE, R. S. da M. – ***Aplicação da Integral de Riemann no Fluxo Sangüíneo de uma Artéria Obstruída***. XIV Congresso Latino-Americano de Biomatemática, 2007, Campinas. p. 59-59

Abstract

In this work we have done a brief biography on Poiseuille, and their contribution in a very important area of mathematics is that the dynamics of fluids. We stress that the laws of Poiseuille were developed in parallel and independently by Gotthilf Hagen, a german hydraulic engineer. We talk a little about some basic concepts such as pressure, viscosity and laminar flow.

They also deducted the two Laws of Poiseuille, one on the flow and the other on the speed in the circulatory system. We emphasize the analogy of the laws of Poiseuille with the Ohm's law for electric circuits. Finally, we made an application of the laws to calculate the optimum angle branch of an artery.

Key Words: Fluids, Flow, Viscosity, Branch.